Title	Skorokhod [Skorohod] のLocal Structure (I) (確率過程研究会報告集 : マルチンゲールを中心として)
Author(s)	櫃田, 倍之
Citation	数理解析研究所講究録 (1969), 74: 1-9
Issue Date	1969-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/107967
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
74巻 1969年 1-9

Skorokhod の local structure (I)

名古屋工大　　櫃田 倍之

§1. 序

A.V. Skorokhod は, "On the local structure of continuous Markov processes" (Theory of prob and its appl. XI (1966) 336—372) において, Markov 過程の local structure を, その process の M-functional (大体 additive functional でかつ martingale となるもの) の構造を調べあげることによって, 決定することを考察した. ここではこの論文の基本的な部分を紹介する. (I) においては, 基本的な概念を導入するだけにとどまり, (II) において, 神田護氏によって, 主な結果が紹介されるはずである. (I) の部分でのべることは, 既に日本において, 本尾, 国田, 渡辺信三氏らによって得られている認識の一部とみなされうるものであるが, formulation の相違もあるので, なるべく忠実に追って行きたい. しかし, 完全に理解できなかったので, 必要に応じて, 仮定を設定したり, 註を加えることにして話を進める.

特に，(I)ではstochastic integralがadditive functionalとして定義されているが，この部分がはっきりしない.

§2. 基本的な概念

locally compact space E上のcontinuous かつ homogeneous な Markov processで次のようなものを考察する：U(⊂E)をopen set ~~U⊂E~~，$\bar{U}$ compactでUからでるときにprocessはstopされる. Uの内部ではstopしない.

このmarkov processを $X=\{x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_x\}$，$\zeta=\tau_U$ (exit time from U)とかく. これはDynkinの本[1]による記号であるが，特に，σ-algebra $\mathcal{M}_t$ は，次の意味でcompletionしてあるものとする：

$$\mathcal{M}_t = \bigcap_x \overline{\sigma(x_s ; s \le t)}^{x} \qquad \overline{\{\ \}}^{x} \text{ は } P_x \text{ についての completion}$$

さらに，Xは強Markov processとする.

<u>条件 A.</u> $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \sup_{x\in U} P_x\{\zeta > t\} = 0$.

shift operator θ_h が

$$\theta_h x_t = x_{t+h}$$

をみたすように，すべての $\mathcal{M}_t$-可測関数に定義されているとする(実は，上の関係から1通りにきまる).

<u>定義</u> α が <u>additive almost homogeneous functional</u>

$\overset{\mathrm{df}}{\Longleftrightarrow}$ 1) 各 t，α_t は $\mathcal{M}_t$ 可測

2) $P_x(\theta_s \alpha_t = \alpha_{t+s} - \alpha_s) = 1 \qquad x\in U,\ s>0,\ t\ge 0$.

以後，単に functional とよぶことにしよう．

$\forall x\in U$, $P_x(\alpha_t$ continuous$)=1$ のとき，<u>continuous functional</u> という．$t\in[0,\zeta)$ で定義された continuous functional だけを考えるが，時に，$\alpha_{\zeta-0}=\lim_{t\uparrow\zeta}\alpha_t$ が存在するとき（P_x measure 1 で），$\alpha_t=\alpha_{\zeta-0}$ $(t>0)$ と拡張して使う．

<u>定義</u> φ_t が <u>W-functional</u> である $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$

1) additive，almost homogeneous，continuous，$\geqq 0$．

2) $\sup_{x\in U} E_x\varphi_t<\infty$ $\quad(\exists t>0)$．

<u>定義</u> continuous functional α_t が M-functional である $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$

1) $E_x\alpha_t=0$, $\forall x\in U$

2) ある W-functional φ_t が存在して，$E_x\alpha_t^2=E_x\varphi_t$, $\forall x\in U$

α_t に対応する φ_t を，$\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ とかく．

<u>例 1</u>. X —— Feller process．A — strong infinitesimal operator ，$\varphi\in D_A$ とするとき，

$$\hat{\varphi_t}=\varphi(x_t)-\varphi(x_0)-\int_0^t A\varphi(x_s)\,ds$$

は M-functional である．

(このとき，対応する W-functional の存在をいうには，Dynkin [1] の Th. 6.6 による)

<u>例 2.</u> X —— Feller process，φ_t —— W-functional で，$E_x\varphi_\zeta=H(x)$ が連続，かつ

$$\lim_{t\downarrow 0}\cdot\sup_{x\in U}E_x\varphi_t=0$$

となるものとするとき,

$$\alpha_t = \psi(x_t) - \psi(x_0) + \varphi_t$$

は M-functional である.

§3. Differentiation of M-functionals.

α_t, β_t を M-functionals とする.

$$\langle \alpha, \beta \rangle_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left[\langle \alpha+\beta, \alpha+\beta \rangle_t - \langle \alpha, \alpha \rangle_t - \langle \beta, \beta \rangle_t\right]$$

とおくとき, α_t, β_t, $\langle \alpha, \beta \rangle_t$ の関係が ~~Lemma~~ Theorem 3.1 によって明確になる. なお, $\langle \alpha, \beta \rangle_t$ のように, W-functional の和と差にかける functional を $\widetilde{W}$-functional とよぶ.

Lemma 3.1. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, $\lambda = \max_k (t_{k+1} - t_k)$ とするとき, $\forall x \in U$,

$$\lim_{\lambda \to 0} E_x \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})^4 = 0$$

この Lemma の証明は, 省略するが, α_t が M-functional であるとき, 任意の measure P_x, $x \in U$, と $\mathfrak{M}_t$ に関する martingale になることを注意すれば, Doob の不等式によって, 導びかれる.

Theorem 3.1. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, $\lambda = \max (t_{k+1} - t_k)$ とするとき,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle_t = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})^2 \quad \text{in prob. } P_x,\ x \in U$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle_t = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})(\beta_{t_{k+1}} - \beta_{t_k}) \quad \text{〃}$$

proof. $E_x\left(\sum^{n-1}\left[(\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})^2 - (\langle \alpha, \alpha \rangle_{t_{k+1}} - \langle \alpha, \alpha \rangle_{t_k})\right]^2\right) \equiv \delta_x \xrightarrow[(\lambda \to 0)]{} 0$

を示せばよいが，これは

$$\delta_x \geqq 2\, E_x \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{t_{k+1}} - \alpha_{t_k})^4 + 2\, E_x \sum \left[\langle \alpha,\alpha \rangle_{t_{k+1}} - \langle \alpha,\alpha \rangle_{t_k} \right]^2$$

と，Lemma 3.1，Dynkin [1] Th. 6.2 から従う．　(ア).

γ_t を $\tilde{W}$-functional，φ_t を W-functional とする．ある $g(s)$ — $\mathfrak{M}_s$-可測関数が存在して，

$$\gamma_t = \int_0^t g(s)\, d\varphi_s \qquad P_x\text{-a.e}\ ,\ x \in U,\ t > 0$$

とかけるとき，γ_t は φ_t に絶対連続であるとよぶことにする．

。 γ_t が φ_t に絶対連続：$\gamma_t \prec \varphi_t$

$\Longleftrightarrow$ $\int_B d\varphi_s = 0$ なら $\int_B d\gamma_s = 0$ 　a.s P_x．但し，B は任意の linear Borel set とする．

。 $g(s) = f(x_s)$ 　P_x a.e，$x \in U$，$s > 0$．

となる ◆可測関数 f が存在する．

[注意] この命題の証明には，$\mathfrak{M}_{t+0} = \mathfrak{M}_t$ が必要であると思われる．いまの場合 Markov 過程 X の path の連続性から，$\mathfrak{M}_t$ を上をみたすようにとりなおしておけばよい．(例えば近藤[3]をみよ．)

略証) $$\overline{\Psi}_s = \overline{\lim_{h_n \downarrow 0}} \frac{\gamma_{s+h_n} - \gamma_s}{\varphi_{s+h_n} - \varphi_s}$$ (分母が 0 なら $\overline{\Psi}_s$ 0 と定義する)

は，$\mathfrak{M}_{s+h}$-可測，$\forall h > 0$．従って，$\mathfrak{M}_{s+}$ 可測．

$$\overline{\Psi}_s \underset{(a.e\, P_x)}{=} \lim_{h_n \downarrow 0} \frac{\theta_s \gamma_{h_n}}{\theta_s \varphi_{h_n}} = \theta_s \overline{\Psi}_0 .$$

従って，Markov 性によって，

$$\overline{\Psi_s} \underset{(a.e\ P_x)}{=\!=} M_x\{\overline{\Psi_s}\mid \mathfrak{M}_{s+}\} \underset{(a.e\ P_x)}{=\!=} M_x\{\overline{\Psi_s}\mid x_s\} \underset{(a.e\ P_x)}{=} M_{x_s}\overline{\Psi_0} = f(x_s)$$

但し，$f(x) = M_x\overline{\Psi_0}$ とする．

Remark　$\langle\alpha,\beta\rangle_t$ は $\langle\alpha,\alpha\rangle_t$ に絶対連続である．これは，細分による構成法からわかる．

定義　$\langle\alpha,\beta\rangle_t = \int_0^t g(x_s)\, d\langle\alpha,\alpha\rangle_s$　(a.e P_x) $(t>0)$

となる $g(x)$ を，M-functional β_t の α_t に関する derivative とよび $\dfrac{\partial\beta}{\partial\alpha}(x)$ とかく．

§ 4. M-functional に関する確率積分

α_t を M-functional，$\langle\alpha,\alpha\rangle_t = \sigma(t)$ とする．$\lambda(t)$ が

1)　$t>0$，　$\lambda(t)$ は $\mathfrak{M}_{t+}$ 可測

2)　$\sup_{x\in U} E_x\int_0^t \lambda(s)^2\, d\sigma(s) < \infty$　$(t>0)$

をみたすとき，Doob の方法によって，stochastic integral $\int_0^t \lambda(s)\, d\alpha_s$ が定義される．この § においては，stochastic integral $\int_0^t g(x_s)\, d\alpha_s$ が additive functional になるように構成することを目標にする．α_t が Wiener process のときには，Dynkin [1] にある．

Theorem 4.1　$g(x)$ — 可測，$\forall t>0$

$$\sup_{x\in U} E_x\left(\int_0^t g(x_s)^2\, d\langle\alpha,\alpha\rangle_s\right) < \infty$$

とすれば，ある M-functional I_t が存在して，

$$I_t = \int_0^t g(x_s)\, d\alpha_s \qquad (a.e\ P_x,\ x\in U)$$

そして，

$$\langle I, I\rangle_t = \int_0^t g(x_s)^2 d\langle\alpha,\alpha\rangle_s .$$

[注意] この Theorem ~~の証明~~は，原論文においては，2段階に分けて証明してある．第1段階では $g(x)$ が連続な場合，第2段階で一般の可測関数の場合を，連続な $g_n(x)$ による近似によって I_t が M-functional になるような version がとれるとしている．この論拠がよく理解できなかった．

<u>Theorem 4.2</u> α_t, β_t —— M-functionals，$g_1(x), g_2(x)$ を可測関数で，$\int_0^t g_1(x_u)\,d\alpha_u$，$\int_0^t g_2(x_u)\,d\beta_u$ の存在するものとする．

このとき，

$$\left\langle \int g_1(x_u)\,d\alpha_u, \int g_2(x_u)\,d\beta_u \right\rangle_t = \int_0^t g_1(x_u)\,g_2(x_u)\,d\langle\alpha,\beta\rangle_u$$

[注意] 原論文の証明は，Th 4.1 の場合と同様，$g_i(x)$, $i=1,2$ が連続の場合しか適用しない形になっている．

<u>系</u>. $I_t^{(1)} = \int_0^t g_1(x_u)\,d\alpha_u$，$I_t^{(2)} = \int_0^t g_2(x_u)\,d\beta_u$ とすると，

$$\frac{\partial I^{(2)}}{\partial I^{(1)}}(x) = \frac{g_2(x)}{g_1(x)} \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}(x)$$

§5. Ito の公式

<u>Theorem 5.1</u> $\alpha_t^{(1)}, \cdots, \alpha_t^{(n)}$ —— M-functionals

$\gamma_t^{(1)}, \cdots, \gamma_t^{(m)}$ —— $\widetilde{W}$-functionals

$\Phi(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta_1, \cdots, \eta_m)$ を $n+m$ 変数，real valued，連続な微係数 Φ_{ξ_i}，Φ_{η_k}，$\Phi_{\xi_i\xi_j}$　$i,j=1,\cdots,n$，$k=1,\cdots,m$ を持つ．

このとき,

$$\Phi(\alpha_t^{(1)}, \cdots, \alpha_t^{(n)}, \gamma_t^{(1)}, \cdots, \gamma_t^{(m)}) = \Phi(0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \Phi_{\xi_i}(\alpha_s^{(1)}, \cdots, \gamma_t^{(m)})\, d\alpha_s^i + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \Phi_{\eta_k}(\alpha_s^{(1)}, \cdots, \gamma_t^{(m)})\, d\gamma_s^{(k)}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \Phi_{\xi_i \xi_j}(\alpha_s^{(1)}, \cdots, \alpha_s^{(n)}, \gamma_s^{(1)}, \cdots, \gamma_s^{(m)})\, d\langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(j)} \rangle_s$$

がなりたつ.

(この定理は, 伊藤清氏による. 変換公式と本質的に同様の証明法によって得られる)

§ 6. 若干の注意

この(1)でふれた部分についての, ほとんどの認識は Kunita-S. Watanabe [2] の中にふくまれるように思える. 特に, ~~Th. 4~~ Th. 5.1 は, より一般に, 2乗可積分な martingale に関する変換公式として, 連続でない martingale の場合も含めて得られている. 従って, この部分の証明は全く行わなかった. さらに, W-functional に関する定義の 2) は, 考察する M-functional が 2次の moment を x に関して一様に持つという強い制約を設けていることになり, この点でも local martingale として一般にとらえる Kunita-Watanabe の考え方がすぐれているといえよう.

Skorokhod の問題提起そのものは, 興味深い. いままで, Markov 過程論の「内部問題」に注目した文献は少いように思わ

れるからである.

細いことであるが, Th 5.1 の右辺の stochastic integral は, 一般に additive functional ではないので, §4 における stochastic integral の範囲にはいっていない。$\int^t g(s,\omega)\,d\alpha_s$ の形の積分が P_x, $x \in U$ によらないで意味をもつことの証明は必要である.
例えば Doob の意味での

文献

[1]. E. B. Dynkin, Markov processes. Springer, (1965)

[2]. H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. vol 30 (1967) 209–245.

[3] 近藤亮司, Markov 過程と Potential, Seminar on Prob. vol 11 (1962)